

Signe du trinôme

Pour déterminer le signe du trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ on distingue aussi trois cas.

a) Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$ et le signe du trinôme est celui de a .

b) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

on obtient $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

dans le cas $x_1 < x_2$, le tableau des signes de $(x - x_1)(x - x_2)$ est

x		x_1		x_2	
$x - x_1$	-	0	+		+
$x - x_2$	-		-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	0	+

alors pour $a > 0$ on a $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$

et pour $a < 0$ on a $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$

En résumé, le signe du trinôme est celui du coefficient a exactement pour les x à l'extérieur des racines.

c) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors $[(x + \frac{b}{2a})^2 + (-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})] > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$

et le signe du trinôme est toujours celui de a .

THEOREME 3 Le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ est celui de a pour tout x sauf si x est compris entre les racines, si elles existent.

Exercices

17 Calculer les racines des applications trinômes.

- 1) $f(x) = 3x^2 + x - 1$ 2) $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$ 3) $f(x) = 6x^2 - x - 2$
 4) $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ 5) $f(x) = x^2 - 6$ 6) $f(x) = x^2 - 5x - 1$

$$\begin{array}{lll}
7) f(x) = x^2 + 3x + 3 & 8) f(x) = x^2 + 7x - 6 & 9) f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1 \\
10) f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 7x & 11) f(x) = 5x^2 - 7 & 12) f(x) = 10x^2 + 5x - 1 \\
13) f(x) = -3x^2 + x + 6 & 14) f(x) = -2x^2 - 5x + 3 & 15) f(x) = -4x^2 - 5x - 4 \\
16) f(x) = x^2 + 3|x| - 1 & 17) f(x) = x^2 - |x + 3| & 18) f(x) = 3x^2 - 2|x + 1|
\end{array}$$

18 Factoriser, si possible, les trinômes et trouver x si $f(x) \geq 0$.

$$\begin{array}{lll}
1) f(x) = x^2 + 4x - 12 & 2) f(x) = 2x^2 - 5x - 12 & 3) f(x) = 15x^2 + x + 1 \\
4) f(x) = -8x^2 + x - 3 & 5) f(x) = 5x^2 - 16 & 6) f(x) = 4x^2 + 18x \\
7) f(x) = 3x^2 + 5x - 1 & 8) f(x) = -7x^2 + x + 1 & 9) f(x) = -2x^2 + 5x + 3
\end{array}$$

19 Déterminer x si $f(x) < 0$.

$$\begin{array}{lll}
1) f(x) = -36x^2 & 2) f(x) = -81x^2 - 9 & 3) f(x) = 25x^2 - 15x \\
4) f(x) = 6x^2 - x - 1 & 5) f(x) = x^2 - 1 & 6) f(x) = -x^2 + x + 1 \\
7) f(x) = -x^2 + x - 1 & 8) f(x) = x^2 - 4x - 3 & 9) f(x) = -x^2 + 2x - 1
\end{array}$$

20 Trouver x si $f(x) = 3$.

$$\begin{array}{lll}
1) f(x) = |x^2 - x| & 2) f(x) = 2x^2 - |x + 1| & 3) f(x) = 3x^2 - |x| \\
4) f(x) = |5x^2 - 75| + x & 5) f(x) = |x^2 - 6x + 9| & 6) f(x) = |x^2 - x - 2| \\
7) f(x) = |x|(x + 2) & 8) f(x) = x|x - 3| & 9) f(x) = |x| \cdot |x + 4|
\end{array}$$

21 En utilisant $\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow (b \neq 0 \text{ et } ab \geq 0)$ (le produit et le quotient ont le même signe), résoudre les inéquations.

$$\begin{array}{lll}
1) \frac{2x + 1}{x - 2} \geq 0 & 2) \frac{1 - 3x}{4 - 8x} \geq 0 & 3) \frac{5x - 2}{3x + 1} < 0 \\
4) \frac{8x - 1}{3x^2 + 1} \leq 0 & 5) \frac{2}{x + 1} - 3 > 0 & 6) \frac{3 - x}{12 + 3x} \leq 2
\end{array}$$

Exercices

22 Si $f(x) = x^2$, montrer pour $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ que

- a) f est une fonction paire;
 b) f est croissante sur $[0, +\infty[$;
 c) f admet un minimum pour $x = 0$, ce minimum est 0.

23 Etudier f en suivant le modèle précédent.

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = x^2 + 1 & 2) f(x) = (x - 1)^2 & 3) f(x) = 4x^2 - 1 \\ 4) f(x) = -x^2 + 2 & 5) f(x) = 2x^2 - |x| & 6) f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2} \end{array}$$

24 Si $f(x) = (x - 2)^2$, montrer que f admet un minimum pour $x = 2$ et que, pour $x_1 = 2 - a$ et $x_2 = 2 + a$, les nombres $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont égaux. En déduire que la courbe Γ_f admet un axe de symétrie vertical.

Etude de la variation de la fonction trinôme

On a
$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Alors

$$x_1 < x_2$$

\Rightarrow

$$x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a}$$

\Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x_1; x_2\} \subset]-\infty; -\frac{b}{2a}] \text{ et } \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \\ \text{ou} \\ \{x_1; x_2\} \subset]-\frac{b}{2a}; +\infty[\text{ et } \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \end{array} \right.$$

\Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x_1; x_2\} \subset]-\infty; -\frac{b}{2a}] \text{ et } \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \text{ou} \\ \{x_1; x_2\} \subset]-\frac{b}{2a}; +\infty[\text{ et } \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \{x_1; x_2\} \subset]-\infty; -\frac{b}{2a}] \text{ et } a \left[\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] > a \left[\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ \text{ou} \\ \{x_1; x_2\} \subset]-\frac{b}{2a}; +\infty[\text{ et } a \left[\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] < a \left[\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{array} \right. \\ \text{ou} \\ a < 0 \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \{x_1; x_2\} \subset]-\infty; -\frac{b}{2a}] \text{ et } a \left[\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] < a \left[\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ \text{ou} \\ \{x_1; x_2\} \subset]-\frac{b}{2a}; +\infty[\text{ et } a \left[\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] > a \left[\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \{x_1; x_2\} \subset]-\infty; -\frac{b}{2a}] \text{ et } f(x_1) > f(x_2) \text{ et } f \text{ est décroissante sur }]-\infty; -\frac{b}{2a}] \\ \text{ou} \\ \{x_1; x_2\} \subset]-\frac{b}{2a}; +\infty[\text{ et } f(x_1) < f(x_2) \text{ et } f \text{ est croissante sur }]-\frac{b}{2a}; +\infty[\end{array} \right. \\ \text{ou} \\ a < 0 \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \{x_1; x_2\} \subset]-\infty; -\frac{b}{2a}] \text{ et } f(x_1) < f(x_2) \text{ et } f \text{ est croissante sur }]-\infty; -\frac{b}{2a}] \\ \text{ou} \\ \{x_1; x_2\} \subset]-\frac{b}{2a}; +\infty[\text{ et } f(x_1) > f(x_2) \text{ et } f \text{ est décroissante sur }]-\frac{b}{2a}; +\infty[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

THEOREME 4 Pour la fonction trinôme f , avec $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $a \neq 0$

si $a > 0$, la fonction admet un minimum $f(-\frac{b}{2a})$,

si $a < 0$, la fonction admet un maximum $f(-\frac{b}{2a})$.

Exercices

25 Déterminer la variation de l'application f . (Ou étudier la monotonie de f)

1) $f(x) = x^2 + x - 2$

2) $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$

3) $f(x) = -2x^2 + 8$

4) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

5) $f(x) = x^2 + 2x + c$

6) $f(x) = -x^2 - 4x + 3$

7) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$

8) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

9) $f(x) = 4x^2 + x + 1$

26 Représenter graphiquement f .

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = |x^2 - 4| & 2) f(x) = x^2 - |2x| & 3) f(x) = |(x+1)(x-3)| \\ 4) f(x) = x^2 + |x^2 - x| & 5) f(x) = (2-x)|x+4| & 6) f(x) = |x^2 + 1| - x \\ 7) f(x) = |9 - x^2| + 1 & 8) f(x) = 2x^2 - |x^2 + 2x + 1| & 9) f(x) = |x^2 - 1| - (x-1)^2 \end{array}$$

27 Déterminer les coefficients a, b, c de la fonction f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour qu'elle admette un extrémum de 3 pour $x = 2$ et que le point $M(-1; -2)$ appartienne au graphique Γ_f .

28 Les dimensions d'un rectangle ABCD sont a et $2a$. Ses côtés portent respectivement les points M, N, P, Q de telle sorte que $\delta(A, M) = \delta(B, N) = \delta(C, P) = \delta(D, Q) = x$. Etudier la variation de l'aire du parallélogramme MNPQ en fonction de x .

29 Etudier la variation de l'aire d'un triangle équilatéral inscrit dans un triangle équilatéral de côté a donné.

30 Où faut-il couper une ficelle d'un mètre de long pour former, avec une partie, un triangle équilatéral et avec l'autre un carré de telle manière que la somme de leurs aires soit minimale?

4 Formules de Viète, équations et inéquations

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta \geq 0$, alors on a deux racines x_1 et x_2 et

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \quad (\text{somme des racines})$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad (\text{produit des racines})$$

Ces formules s'appellent "formules de Viète". Elles sont utiles pour connaître le signe des racines d'un trinôme, s'il y en a.

Exercices

31 Donner le nombre et, si possible, le signe des racines des applications trinômes suivantes.

- 1) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ 2) $f(x) = -5x^2 + 4x + 3$ 3) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}$
 4) $f(x) = 7x^2 + 2x + 1$ 5) $f(x) = 7x^2 - 5x$ 6) $f(x) = -8x^2 + 1$
 7) $f(x) = mx^2 + 2x + 1$ 8) $f(x) = 5x^2 - 8x + m$ 9) $f(x) = (m+1)x^2 + x + 3$
 10) $f(x) = (m-5)x^2 - 2x + 1$ 11) $f(x) = 3x^2 - mx - 5$ 12) $f(x) = 2x^2 + (m+3)x + 1$

32 Trouver deux nombres a et b tels que

- 1) $a + b = \frac{22}{3}$ et $ab = \frac{7}{3}$ 2) $a + b = 19$ et $ab = 78$ 3) $a + b = 1$ et $ab = 1$
 4) $a + b = -1$ et $ab = 72$ 5) $a + b = \frac{5}{6}$ et $ab = \frac{1}{6}$ 6) $a + b = 18$ et $ab = 20$

33 Trouver m si f

- 1) $f(x) = 2x^2 + x + m$ et f admet deux racines de même signe.
 2) $f(x) = 3x^2 + x + 2m$ et f admet une racine double positive.
 3) $f(x) = (3m+1)x^2 + 2x + 1$ et f admet deux racines de signes contraires.
 4) $f(x) = (m+5)x^2 + x + 2$ et $f(x) > 0$ pour tout x réel.
 5) $f(x) = (m+1)x^2 + 2x + 1$ et f admet deux racines distinctes négatives.
 6) $f(x) = 2x^2 + mx + 1$ et f admet deux racines distinctes positives.
 7) $f(x) = 5x^2 + 2x - m$ et f admet une racine double négative.
 8) $f(x) = 3x^2 - x + m - 3$ et f admet une racine nulle. Quelle est alors le signe de l'autre racine?

34 Déterminer le nombre, le signe et les valeurs relatives des racines de f suivant les valeurs du paramètre m .

- 1) $f(x) = (m+1)x^2 - mx + 1 - m$. 2) $f(x) = (m-6)x^2 - 4(m-1)x + m - 3$
 3) $f(x) = (m-2)x^2 + 2(m-3)x + 5m - 6$ 4) $f(x) = (m-4)x^2 + 2(m-1)x + 2m - 3$

35 Résoudre les inéquations selon le modèle suivant.

$$\frac{3x-1}{2-x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2-x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-3}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } (4x-3)(2-x) \leq 0$$

car le signe du quotient est celui du produit qui est un trinôme. On applique alors le théorème du signe du trinôme et l'on évite ainsi le recours au tableau de signes.

$$\text{Ainsi, } \frac{3x-1}{2-x} \leq 1 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } (4x-3)(2-x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{3}{4}] \cup]2; +\infty[.$$

- 1) $\frac{2x}{x-1} < 3$ 2) $\frac{7+x}{2x+1} \leq \frac{3}{4}$ 3) $\frac{3}{2-x} > \frac{5}{x+2}$
 4) $\frac{2x}{x-5} \geq \frac{3}{x+2}$ 5) $\frac{x}{2+x} > x+1$ 6) $\frac{x^2-4}{(x+1)(x-2)} \geq 0$
 7) $\frac{x}{x+3} < \frac{1}{2-x}$ 8) $\frac{5x-1}{3-x} \geq \frac{x}{3}$ 9) $\frac{1}{x+1} - 3 < \frac{4-3x}{x-1}$

36 Résoudre les inéquations irrationnelles selon le modèle suivant.

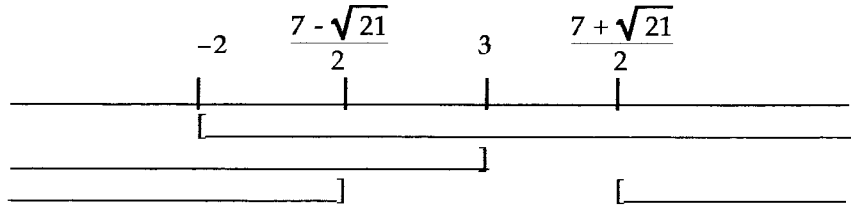
$$\sqrt{x+2} + 3 \leq -x+6 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \leq -x+3$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ et } \begin{cases} x \leq 3 \text{ et } x+2 \leq x^2-6x+9 \text{ et } 0 \leq x^2-7x+7 \\ \text{ou} \\ x > 3 \text{ et } (\sqrt{x+2} \geq 0 \text{ et } -x+3 < 0) \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{cases}$$

$$\text{avec } x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-28}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2 \text{ et } \begin{cases} x \leq 3 \text{ et } x \in]-\infty; \frac{7-\sqrt{21}}{2}] \cup [\frac{7+\sqrt{21}}{2}; +\infty[\\ \text{ou} \\ x > 3 \text{ et } x \in \emptyset \end{cases}$$

avec le tableau



$$\Leftrightarrow x \in [-2; \frac{7-\sqrt{21}}{2}]$$

- | | | |
|--------------------------------------|---|----------------------------------|
| 1) $\sqrt{x+1} \leq \sqrt{x+2}$ | 2) $\sqrt{1-2x} \leq 3$ | 3) $2-\sqrt{x+7} \geq 0$ |
| 4) $x+\sqrt{x+3} > 0$ | 5) $\sqrt{2+x-x} \geq 3$ | 6) $\sqrt{x} - \sqrt{-2-x} < 0$ |
| 7) $\sqrt{1+2x}-1 \leq -x$ | 8) $\sqrt{x}-\sqrt{x+1} \geq 1$ | 9) $\sqrt{x^2-1} > x$ |
| 10) $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \leq 1$ | 11) $\frac{\sqrt{2x+1}}{x+1} \geq 2$ | 12) $\sqrt{(x+1)(x-2)}-1 \leq x$ |
| 13) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} \leq 3$ | 14) $\sqrt{x} - \sqrt{x+2} \leq \sqrt{x-3}$ | |

37 Résoudre dans \mathbf{R} selon l'exemple suivant.

$$x^4 + 3x^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow x^2 = t \text{ et } t^2 + 3t - 40 = 0 \Leftrightarrow x^2 = t \text{ et } t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = t \text{ et } t \in \{5; -8\} \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $4x^4 + 12x^2 + 9 = 0$ | 2) $2x^4 + 5x^2 + 3 = 0$ |
| 3) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ | 4) $x^6 + 35x^3 + 216 = 0$ |
| 5) $x^6 - x^4 = 0$ | 6) $-x^8 + 17x^4 - 16 = 0$ |

38 Résoudre dans \mathbf{R}

- | | |
|-------------------------|----------------------------|
| 1) $\sqrt{5x+10} = 8-x$ | 2) $\sqrt{169-x^2} = x-17$ |
|-------------------------|----------------------------|

$$3) \quad \sqrt{x^2 + 1} - 2x = -1$$

$$4) \quad \sqrt{x+5} = 2 + \sqrt{x-1}$$

$$5) \quad \sqrt{x-5} = x + \sqrt{x+1}$$

$$6) \quad \sqrt{x-2} - \sqrt{x+3} = 2$$

- 39 Si $\delta(A,B) = 1$, comment partager $[A,B]$ pour obtenir deux segments sachant que le rapport des longueurs du grand segment relativement au moyen est égal au rapport des longueurs du moyen segment au plus petit? (Nombre d'or)
- 40 Quelles sont les dimensions d'un rectangle dont l'aire est 527 et le périmètre 96?
- 41 Trouver l'aire d'un triangle rectangle sachant que la longueur d'un cathète est 10 et que l'hypoténuse est deux fois plus longue que l'autre cathète. Qu'obtient-on si l'on pose que l'hypoténuse est n fois plus longue que l'autre cathète, avec $n \in \mathbf{N}^*$?
- 42 a) Trouver deux nombres dont la moyenne arithmétique est 58 et la moyenne géométrique 42.
b) Comment choisir deux nombres pour que leur moyenne arithmétique soit leur moyenne géométrique?
- 43 Sans calculer les racines x' et x'' de la fonction f déterminer la fonction trinôme g qui admet pour racines $x_1 = 3x' + 2$ et $x_2 = 3x'' + 2$, si $f(x) = x^2 - 4x - 1$.
- 44 Sans calculer les racines x' et x'' de la fonction f déterminer la fonction trinôme g qui admet pour racines $x_1 = (x')^2$ et $x_2 = (x'')^2$, si $f(x) = 3x^2 - 2x - 7$.
- 45 Sans calculer les racines x' et x'' de la fonction f déterminer la fonction trinôme g qui admet pour racines $x_1 = (x')^2 - 5$ et $x_2 = (x'')^2 - 5$, si $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$.